

## Problemas de Física para Informática

Soluciones del examen de Febrero de 2000

### PROBLEMA 1.1.1

Sobre los vértices de un hexágono regular están dispuestas seis cargas como muestra la figura P1.1.1. Calcular el potencial y campo eléctrico en el origen de coordenadas O. Explicar la relación que hay entre potencial y campo en el punto O.

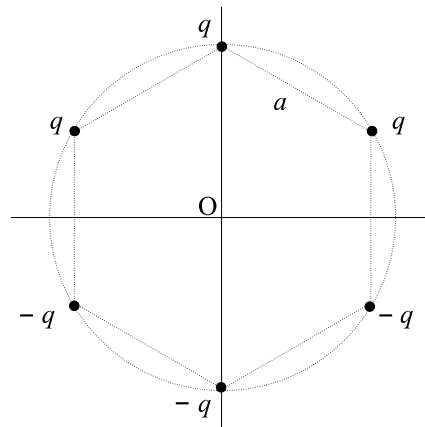


Figura P1.1.1

#### Solución

##### 1) Potencial eléctrico

Dado que todas las cargas están a la misma distancia del punto O,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = a \quad \text{para } i = 1, 2, 3, 4, 5, \text{ y } 6$$

por tanto,

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^6 \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$$

$$V(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{q}{a} + \frac{q}{a} + \frac{q}{a} - \frac{q}{a} - \frac{q}{a} - \frac{q}{a} \right) = 0$$

##### 2) Campo eléctrico

Para determinar el campo eléctrico utilizamos la ecuación siguiente,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^6 \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Ya hemos visto que  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = a$ . Ahora debemos calcular los términos  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ . Si numeramos las cargas empezando por la situada en el primer cuadrante y en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, los vectores de posición de las cargas son:

$$\mathbf{r}_1 = a(\cos 30^\circ \mathbf{u}_x + \sin 30^\circ \mathbf{u}_y)$$

Como  $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$  y  $\sin 30^\circ = 1/2$

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}a(\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \quad ; \quad \mathbf{r}_2 = a\mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{1}{2}a(-\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \quad ; \quad \mathbf{r}_4 = -\frac{1}{2}a(\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)$$

$$\mathbf{r}_5 = -a\mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{r}_6 = \frac{1}{2}a(\sqrt{3}\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y)$$

Dado que en el punto O  $\mathbf{r} = 0$ ,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = -\frac{1}{2}a(\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \quad ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_2 = -a\mathbf{u}_y$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_3 = -\frac{1}{2}a(-\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \quad ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_4 = \frac{1}{2}a(\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_5 = a\mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_6 = -\frac{1}{2}a(\sqrt{3}\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y)$$

Llevando las relaciones anteriores a la ecuación que permite calcular el campo tendremos,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^6 \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{a^3}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{a^3} \left( q \left( -\frac{1}{2}a(\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) - a\mathbf{u}_y - \frac{1}{2}a(-\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \right) - q \left( \frac{1}{2}a(\sqrt{3}\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) + a\mathbf{u}_y - \frac{1}{2}a(\sqrt{3}\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y) \right) \right)$$

Realizando operaciones queda,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{4q}{a^2} \mathbf{u}_y = -\frac{q}{\pi\epsilon_o a^2} \mathbf{u}_y$$

Hemos visto que el potencial en el punto O es nulo pero el campo no. Que el potencial sea nulo en O no quiere decir que lo sea en los puntos próximos

a O. Y como hay una variación del potencial entre O y los puntos que lo rodean el campo es distinto de cero en O como ha quedado demostrado.

### PROBLEMA 1.1.2

Dado el circuito que muestra la figura P1.1.2, calcular las corrientes que circulan por las distintas ramas. Indicar de forma razonada la(s) batería(s) que suministra(n) energía.

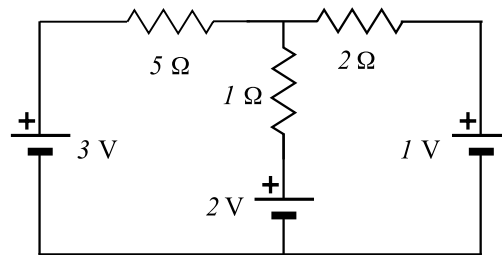


Figura P1.1.2

### Solución

Suponemos que las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  en los lazos tienen el sentido horario. El sistema de ecuaciones para este circuito es de la forma,

$$\begin{aligned} 3 - 2 &= I_1(5 + 1) - I_2 \\ 2 - 1 &= -I_1 + I_2(2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 6I_1 - I_2 \\ 1 &= -I_1 + 3I_2 \end{aligned}$$

La solución para este sistema de ecuaciones por el método de Cramer es,

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3 + 1}{18 - 1} = \frac{4}{17} \simeq 0,235$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{6 + 1}{17} = \frac{7}{17} \simeq 0,412$$

La corriente en la rama común es,

$$I_c = I_2 - I_1 = \frac{7}{17} - \frac{4}{17} = \frac{3}{17} \simeq 0,176$$

La corriente  $I_c$  tiene el mismo sentido que  $I_2$ .

Dado el sentido de las corrientes en las tres ramas donde están las pilas, se deduce que las pilas de 3 y 2 voltios suministran energía (la corriente entra por el polo negativo y sale por el positivo) y la de 1 voltio recibe energía (la corriente entra por el positivo y sale por el negativo).

Si hubiéramos elegido los sentidos de las corrientes de manera que  $I_1$  tiene el sentido de avance de las agujas del reloj e  $I_2$  el contrario, el signo de los términos que genera la rama compartida cambiaría ya que la caída de tensión en dicha rama es  $1 \cdot I_c = 1(I_1 + I_2)$ , tanto para un lazo como para el otro. El sistema de ecuaciones sería,

$$\begin{aligned} 3 - 2 &= I_1(5 + 1) + I_2 \\ -2 + 1 &= I_1 + I_2(2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 6I_1 + I_2 \\ -1 &= I_1 + 3I_2 \end{aligned}$$

cuya solución es,

$$I_1 = \frac{4}{17} ; I_2 = -\frac{7}{17}$$

$$I_c = I_1 + I_2 = -\frac{3}{17}$$

Es decir, tanto  $I_2$  como  $I_c$  tendrían realmente el sentido contrario al elegido.

### PROBLEMA 1.1.3

Una espira circular de radio  $a$  y centro en el origen de coordenadas, está situada sobre el plano XZ como muestra la figura P1.1.3, y en presencia de un campo magnético cuyo módulo es  $B = B_o \cos \omega t$ . Dicho campo forma un ángulo de  $60^\circ$  con el eje X. Calcular la f.e.m. inducida en la espira.

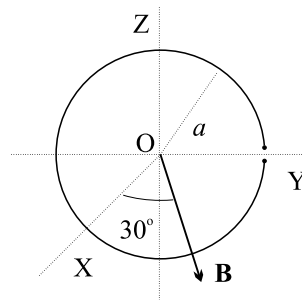


Figura P1.1.3

### Solución

La fuerza electromotriz se calcula aplicando la ley de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

El flujo a través de la espira circular es,

$$\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$$

Con  $\mathbf{B} = B(\cos 30^\circ \mathbf{u}_x + \sin 30^\circ \mathbf{u}_y)$  y  $\mathbf{S} = \pi a^2 \mathbf{u}_x$  el flujo será,

$$\Phi = \pi a^2 B \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^2 B = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^2 B_o \cos \omega t$$

La f.e.m. es,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^2 B_o (-\omega \sin \omega t)$$

$$\mathcal{E} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi a^2 B_o \omega \sin \omega t$$

### PROBLEMA 1.2.1

Tenemos una batería  $V_o$  unida a un sistema de condensadores dispuesto como indica la figura P1.2.1. Inicialmente el interruptor  $S$  esta abierto. En un instante dado se cierra el interruptor. Calcular la carga en los condensadores antes y después de cerrar el interruptor.

$C_1 = 1 \mu\text{F}$ .  $C_2 = 0,5 \mu\text{F}$ .  $C_2 = C_3$ .  $V_o = 10 \text{ V}$ .

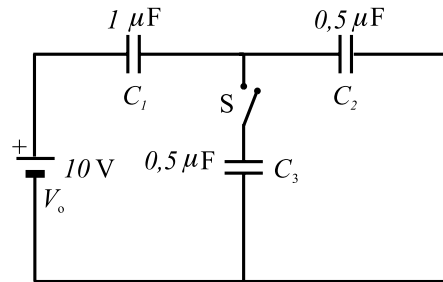


Figura P1.2.1

### Solución

*Antes de cerrar el interruptor  $S$*

Los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  están dispuestos en serie, por tanto

$$Q_1 = Q_2$$

La suma de tensiones es,

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q_1 \left( \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right)$$

Sustituyendo los valores de  $V$ ,  $C_1$  y  $C_2$

$$10 = Q_1 \frac{1,5 \cdot 10^{-6}}{0,5 \cdot 10^{-12}} = Q_1 3 \cdot 10^6$$

Despejando  $Q_1$  obtenemos la carga en los dos condensadores,

$$Q_1 = Q_2 = \frac{1}{3} 10^{-5} \text{ [C]}$$

La carga en  $C_3$  es nula por no estar conectado a la pila.

*Después de cerrar el interruptor  $S$*

Los condensadores  $C_2$  y  $C_3$  están en paralelo, por tanto su capacidad equivalente es la suma de las dos, es decir,

$$C_e = C_2 + C_3 = (0,5 + 0,5) 10^{-6} = 10^{-6} \text{ [F]} = 1 \text{ } [\mu\text{F}]$$

El condensador  $C_e$  está en serie con  $C_1$ , por tanto,

$$Q'_1 = Q_e$$

Ahora,

$$V = \frac{Q'_1}{C_1} + \frac{Q_e}{C_e} = Q_e \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_e} \right)$$

Sustituyendo los valores de las capacidades y de la tensión tenemos,

$$10 = Q_e \left( \frac{1}{10^{-6}} + \frac{1}{10^{-6}} \right) = 2 \cdot 10^6 Q_e$$

Despejando la carga obtenemos,

$$Q_e = \frac{1}{2} 10^{-5} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}$$

$$Q'_1 = Q_e = 5 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}$$

Como los condensadores  $C_2$  y  $C_3$  tienen la misma capacidad y están en paralelo, la carga  $Q_e$  se divide en parte iguales entre los dos, es decir,

$$Q'_2 = Q'_3 = \frac{1}{2} Q_e = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ [C]}$$

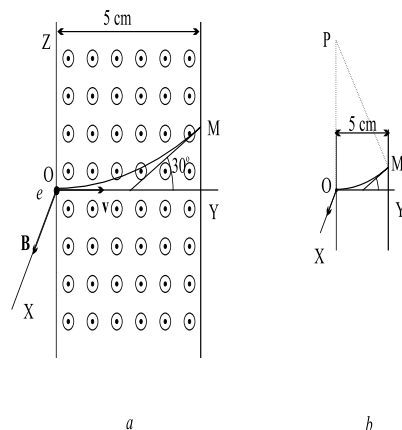
Resumiendo,

$$\begin{aligned} Q'_1 &= 5 \cdot 10^{-6} \text{ [C]} \\ Q'_2 &= Q'_3 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ [C]} \end{aligned}$$

### PROBLEMA 1.2.2

Un electrón se lanza con velocidad  $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_y$  a un espacio donde existe un campo magnético  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_x$  ( $B = 0,01$  tesla), a través del punto O indicado en la figura P1.2.2. El electrón dentro del campo magnético sigue una trayectoria y colisiona con una pantalla situada a 5 cm. de O en el punto M. En el punto M la tangente a la trayectoria forma un ángulo de  $30^\circ$  con el eje Y. Calcular la velocidad  $v$ .

Masa del electrón  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg. Carga  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.



**Figura P1.2.2**

### Solución

La trayectoria de la carga  $e$  dentro del campo magnético uniforme es una circunferencia, cuyo radio se obtiene igualando las fuerzas magnética y centrífuga,

$$B e v = \frac{mv^2}{R}$$

despejando  $v$  tenemos que,

$$v = \frac{B e R}{m}$$

Para calcular la velocidad  $v$  sólo nos falta obtener el radio  $R$ . En la figura P1.2.2b, que es una copia en tamaño reducido de la figura P1.2.2a, vemos que el ángulo que forman los radios PO y PM es el mismo que forman las tangentes a la circunferencia en los puntos O y M, es decir, dicho ángulo es  $30^\circ$ , por tanto,

$$R \sin 30^\circ = 0,05 \text{ m}$$

$$R = \frac{0,05}{0,5} = 0,1 \text{ m}$$

Calculamos  $v$  sustituyendo los distintos valores que interviene en la ecuación obtenida anteriormente,

$$v = \frac{0,01 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1}{9,1 \cdot 10^{-31}} = 1,7582 \times 10^8 \text{ [m/s]}$$

### PROBLEMA 1.2.3



Disponemos de un circuito como el indicado en la figura P12.3, donde  $R = 10^5 \Omega$ ,  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 0,001 \mu\text{F}$  y  $L = 1 \text{ mH}$ . La frecuencia angular  $\omega = 10^4$  y el generador G suministra una tensión  $V = 10 \angle 0 = 10 + j0$  voltios. Calcular módulo y fase de la corriente que circula por la autoinducción  $L$ . Obtener la diferencia de potencial entre los bornes de la resistencia  $R$ .

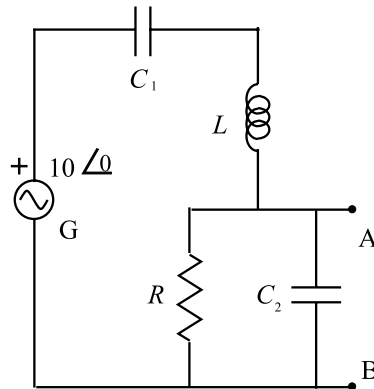


Figura P1.2.3

### Solución

El circuito está formado por dos impedancias  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$  en serie.

$\mathbf{Z}_1$  está formada por la autoinducción  $L$  y el condensador  $C_1$  en serie.

$\mathbf{Z}_2$  lo forman una resistencia  $R$  y el condensador  $C_2$  dispuestos en paralelo.

Calculamos en primer lugar las impedancias.

$$\mathbf{Z}_1 = j\omega L - \frac{j}{\omega C_1} = j 10^4 \cdot 10^{-3} - \frac{j}{10^4 \cdot 10^{-5}} = 0$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_2} = \frac{1}{R} + j\omega C_2 = \frac{1 + j\omega R C_2}{R} = \frac{1 + j 10^4 \cdot 10^5 \cdot 10^{-9}}{10^5}$$

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_2} = 10^{-5}(1 + j)$$

La corriente que circula por el circuito es,

$$\mathbf{I} = \frac{V}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2} = \frac{V}{\mathbf{Z}_2} = V \cdot 10^{-5}(1 + j)$$

$$\mathbf{I} = 10 \cdot 10^{-5}(1 + j) = 10^{-4}(1 + j) \text{ [A]}$$

Como la impedancia  $\mathbf{Z}_1 = 0$  para la frecuencia  $\omega = 10^4$ , la tensión entre los bornes de la resistencia  $R$  es,

$$V_{AB} = V = 10 \text{ [V]}$$

o bien,

$$V_{AB} = \mathbf{Z}_2 \mathbf{I} = \frac{10^{-4}(1+j)}{10^{-5}(1+j)} = 10 \text{ [V]}$$

Victoriano López Rodríguez UNED